PLAN DU CHAPITRE VII – EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1. INTRODUCTION

Nous nous intéressons aux équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients rationnels et d'inconnue des fonctions holomophes, c'est-à-dire que nous cherchons à comprendre les fonctions holomorphes f vérifiant $af'' + bf' + cf = 0$ avec $a, b, c \in \mathbf{C}[z]$.

Nous allons effectuer des changements de variable ($'z'$) et des changements d'inconnue ($'y'$), il sera beaucoup plus pratique de travailler avec les notations de Leibniz qui permettent des abus de notations très pratiques. La notation $f(z)$ signifiera f fonction holomorphe de la variable complexe z (les autres fonctions sur le plan seront notées $f(z, \bar{z})$) ; la dérivée complexe de f sera $\frac{df}{dz}$.

Exemple 1. *Si $f(z) = \exp(z^2)$ et $w = \frac{1}{z}$ est un changement de variable nous noterons $f(w) = \exp(1/w^2)$. (Si cela vous dérange vous pouvez lui donner un autre nom mais au bout du dixième changement de coordonnée vous aurez épuisé les noms et les notations raisonnables.*

Maintenant $\frac{df}{dz}(z) = 2z\exp(z^2)$ mais $\frac{df}{dw}(w) = \frac{-2}{w^3}\exp(\frac{1}{w^2})$ et $\frac{df}{dz}(w) = \frac{2}{w}\exp(1/w^2)$ et $\frac{df}{dw}(z) = -2z^3\exp(z^2)$. En générale : $\frac{df}{dz} = \frac{df}{dw}\frac{dw}{dz}$ à condition d'exprimer tout le monde comme dans la même variable.

Remark 1. *Pour nous, f est une fonction définie sur un ouvert du plan sans coordonnée a priori. Pour faire des calculs nous introduisons une coordonné complexe qui à un point associe un nombre complexe $z : p \mapsto z(p)$ pour faire d'autres calculs, nous introduisons une autre coordonnée w. Les expression $f(z)$ et $f(w)$ signifie : l'expression de f dans la coordonnée z et l'expression de f dans la coordonnée w. Formellement ces deux fonctions sont f_1 et f_2 vérifant $f(p) = f_1(z(p) = f_2(w(p))$. Notre abus (standard) allège les notations.*

Cette notation est analogue à $[u]_{\mathscr{B}}$ pour désigner l'expresssion (= matrice) d'un endomorphisme u dans une base $\mathscr{B}$ (= coordonnées cartésiennes).

Dans la suite y sera une indeterminée différentielle (analogue pour une équation différentielle de l'indéterminée d'une équation polynomiale).

Voici quelques exemples qui se ressemblent mais les petites variations des équations (linéaires/non-linéaires ; autonomes/non-autonomes) impliquent de grandes différence des solutions.

- Equation linéaire : $\frac{d^2y}{dz^2} = 6y + c$ où c est une constante. Les solutions sont $y(z) = c_1 e^{\sqrt{6}z} + c_2 e^{-\sqrt{6}z} + c/6$ – elles sont entières.
- Equation elliptique : $\frac{d^2y}{dz^2} = 6y^2 + c$ où c est une constante. Les solutions sont des fonctions de Weiestrass dont les réseau depend de c et d'une autre constante (expliquez pourquoi) – elles sont méromorphes sur $\mathbf{C}$ avec une distribution de pôles homogène.
- 1ere équation de Painlevé : $\frac{d^2y}{dz^2} = 6y^2 + z$, impossible à résoudre avec des formules (Théorème difficile d'H. Umemura). Les solutions sont méromorphes sur $\mathbf{C}$ (Théorème difficile de Painlevé). Les distributions des pôles ne sont pas uniformes et varient énormement avec les solutions. (Les solutions tri-tronquées sont assez uniformes)

Avant de passer aux équations d'ordre 2 proprement dites regardons les équations d'ordre 1 :

$$a_0(z)\frac{dy}{dz} + a_1(z)y = 0 \quad a_0, a_1 \in \mathbf{C}[z]$$

Si on cherche une solution holomorphe, on peut diviser par a_0 et intégrer : (Si on cherche les solutions dans un autre $\mathbf{C}[z]\left[\frac{d}{dz}\right]$-module comme celui des distributions, qui a de la torsion ce ne sera pas possible.)

$$y(z) = exp\left(-\int \frac{a_1}{a_0}dz\right).$$

Pour interpréter cette formule comme une fonction holomorphe nous devons choisir une détermination de la primitive, nous introduisons des singularités essentielles en certains zéros de a_0.

Exemple 2. *L'equation $\frac{dy}{dx} - \alpha y = 0$; $\alpha \in \mathbf{C}$ a pour solutions $y(x) = cz^\alpha$ avec $c \in \mathbf{C}$. Interpréter cette formule comme une fonction holomorphe nécessite de choisir une chemin joignant 0 à ∞ et de choisir une détermination de l'argument (ou du $\log$) sur son complémentaire.*

La notion de solution maximale, très pratique lorsqu'on regarde des EDO d'une variable réelle, est plus difficile à mettre en place en complexe. Elle nécessite l'introduction de fonctions multiformes (ou multivaluées) dites surfaces de Riemann (ou log-tube surfaces) et en complément la notion plus géométrique de feuilletage.

Les réference sont

(1) Ahlfors : équations différentielles lineaires (Chapitre 8 - 4) puis prolongement analytique (Chap 8 de 1.4 à 1.6)
(2) Kristensson (très détaillé : Chapites 1,2,3, une partie du 4 et quelques parties des chapitres suivants)
(3) Hille – Ordinary Differential Equation (à trouver tout seul)
(4) Lang – Chapitre XI pour le prolongement analytique.

…et pour aller plus loin

- M. Kuga – Galois' Dream ; group theory and differential equations
- M. Yoshida – Fuchsian Differential Equations ; with special emphasis on the Gauss-Schwarz theory
- M. Yoshida – Hypergeometric Functions, My Love ; modular interpretations of configuration spaces

2. Quelques généralités

Nous écrirons

$$\frac{d^2y}{dz^2} = p(z)\frac{dy}{dz} + q(z)y \quad ; \quad p, q \in \mathbf{C}(z) \tag{1}$$

suivant les notations d'Ahlfors qui ne sont pas celles de Kristensson.

2.1. …à distance finie.

Définition 1. *Pour f_1 et f_2 deux solutions de (1) définies sur un même domaine, on note $\mathcal{W}$ le wronskien :*

$$\mathcal{W} = \det\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{pmatrix}$$

Lemma 1. $\frac{d\mathcal{W}}{dz} = p(z)\mathcal{W}$

Proof. – □

Proposition 1. *Soient f_1 et f_2 sont deux solutions de (1) définies sur un même domaine. Les vecteurs $(f_1(z_0), f_1'(z_0))$ et $(f_2(z_0), f_2'(z_0))$ sont $\mathbf{C}$-linéairement indépendants si et seulement si les fonctions f_1 et f_2 sont $\mathbf{C}$-linéairement indépendantes.*

Proof. – Si f_1 et f_2 sont liés, il en est de même des vecteurs. Si els vecteurs sont liés, leur wronskien est une solution de l'équation du lemme ci-dessus qui s'annule en z_0. Nous connaissons toutes les solutions de l'équation du wronskien :

La formule $w(z) = \exp\left(\int p(z)dz\right)$ definit une solution. Si $\mathcal{W}$ est une autre solution, la dérivée de $\frac{\mathcal{W}}{w}$ est $\frac{\mathcal{W}'w - \mathcal{W}w'}{w^2} = \frac{p\mathcal{W}w - p\mathcal{W}w}{w^2} = 0$, ainsi $\mathcal{W}$ est un multiple de w. Puisque w ne s'annule pas, si un de ses multiples s'annulle, il est identiquement nulle.

□

Proposition 2. *Soint U un domaine, $\mathcal{W}$ une solution non nulle de l'équation du wronskien et f_1 une solution de (1) définie sur U. La fonction définie par*

$$f_1(z)\int \frac{\mathcal{W}}{f_1^2}(z)dz$$

complète f_1 en une base de $\mathrm{Sol}(\tilde{U})$ pour un $\tilde{U} \subset U$ dont le wronskien est $\mathcal{W}$.

Proof. –

□

Proposition 3. *Soint U un domaine et $\mathrm{Sol}(U)$ le $\mathbf{C}$ espace vectoriel des solutions de (1) holomorphes sur U. Alors $\dim \mathrm{Sol}(U) \leq 2$.*

Proof. – Nous devons montrer que si f_1, f_2 et f_3 sont trois solutions de (1) sur un domaine U alors il existe $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbf{C}^3 \setminus 0$ tels que $c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 = 0$.

Si $M = \begin{pmatrix} f_1 & f_1' \\ f_2 & f_2' \\ f_3 & f_3' \end{pmatrix}$ nous pouvons prendre c tel que $cM(z_0) = 0$. Ainsi la première coordonnée de cM est une solution f s'annulant en z_0 et dont la dérivée f' donnée par la seconde coordonnées s'nnule aussi en z_0. L'équation différentielle inplique la f'' s'annule en z_0. On montre par récurrence que toutes les d{erivées f^n s'annulent en z_0. La fonction f étant holomorphe si toutes ses dérivées s'annulent en unn même point, la fonction est identiquement nulle.

La récurrence sera explicitée dans la partie formelle de la preuve du théorème de Cauchy. □

2.2. ... **en** $\infty \in \hat{\mathbf{C}}$.

Pour étudier les solutions au voisinage de ∞, on fera le changement de variable $w = \frac{1}{z}$. Donnez les formules de changement de variables : Kristensson page 24.

3. Étude locale

Définition 2. *Un point $z_0 \in \mathbf{C}$ sera dit régulier (ou ordinaire) si ce n'est ni un pôle de p ni un pôle de q. Les autres points seront dit singuliers.*

3.1. ... en un point régulier.

Théorème 3.1 (Cauchy)**.** *Considérons l'équation différentielle (1). Si z_0 est régulier et pour $(y_0, y_1) \in \mathbf{C}^2$, il existe une solution f holomorphe au voisinage de z_0 telle que $f(z_0) = y_0$ et $f'(z_0) = y_1$.*

Si f et g sont deux solutions comme ci-dessus alors elles coincident sur un voisinage de z_0.

Illustrez ce théorème sur vos exemples préférés

Vous connaissez plusieurs preuves de ce théorème (et de théorèmes plus généraux) dans le cas d'une variable réelle. Retrouvez le théorème dit de Cauchy-Lipschitz avec au moins une preuve ; soit en faisant converger la méthode d'Euler, soit par le point fixe de Picard ... ou une autre) Ne recopier pas la preuve ici, une référence à un livre suffira.

Nous allons suivre une des 3 preuves originales de Cauchy : la méthode des séries majorantes. Elle consiste à ré'soudre léquation dans l'anneau des séries formelles en $z - z_0$ puis à majorer la série par une série explicitement convergente. Elle est plus prÃ©cise que les autres preuves mais ne fonctionne qu'en analytique.

Cette preuve n'est pas dans les référence, je la ferai en cours lundi. Vous trouverez d'autres preuves dans les livres (Ahlfors ressemble à celle-ci, Kristesson au point fixe de Picard)

Quitte à effectuer une translation par z_0 en la variable, nous pouvons supposer que $z_0 = 0$

Etape formelle

Une équation différentielle linéaire est un système d'une infinité d'équations linéaires en une infinité de variables. Suivant Newton, nous utiliserons la méthode des coefficients indéterminés pour résoudre ces équations.

Développons $p(z) = \sum_{n\geq 0} p_n z^n$, $q(z) = \sum_{n\geq 0} q_n z^n$ et supposons qu'une solution s'écrive $f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n$. Nous connaissons f_0 et f_1 et nous allons déterminer les autres coefficients. En identifiants les séries formelles dans (1), nous obtenons :

$$\begin{array}{rcl}
2f_2 & = & f_1p_0 + f_0q_0 \\
6f_3 & = & 2f_2p_0 + f_1p_1 + f_1q_0 + f_0q_1 \\
 & \vdots & \\
n(n-1)f_n & = & (n-1)f_{n-1}p_0 + (n-2)f_{n-2}p_1 + \ldots + f_1p_{n-2} \\
 & & \qquad +f_{n-2}q_0 + f_{n-3}q_1 + \ldots + f_0q_{n-2} \\
 & & \text{que l'on réécrit} \\
n(n-1)f_n & = & E_n(p_0, \ldots, p_{n-2}, q_0, \ldots, q_{n-2}, f_0, \ldots f_{n-1})
\end{array}$$

avec E_n un polynome en $3n-2$ variables à coefficients dans $\mathbf{N}$.

Si f_0 et f_1 sont donnés les autres coefficients se calculent par récurrence. Ceci prove déjà l'unicité.

Etape des séries majorantes

Définition 3. *On dit que $F(z) = \sum_{n\geq 0} F_n z^n \in \mathbf{R}_+[[z]]$ majore la série $f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n \in \mathbf{C}[[z]]$ si $\forall n$, $|f_n| \leq F_n$. On note $f \prec F$.*

Proposition 4. *Soient $p, q \in \mathcal{O}(D(0,r))$ et $f \in \mathbf{C}[[z]]$ vérifiant $f'' = pf + gf$. Si $p \prec P$, $q \prec Q$ et F est une solution de $F'' = PF' + QF$ telle que $|f_0| \leq F_0$ et $|f_1| \leq F_1$ alors $f \prec F$.*

Proof. – La preuve se fait par récurrence en remarquant que E_n est à coefficients positifs :

$$n(n-1)|f-n| \leq |E_n(p_i, q_i, f_i))| \leq E_n(|p_i|, |q_i|, |f_i|) \leq E_n(P_i, Q_i, F_i) = n(n-1)F_n$$

□

Pour finir la preuve du théorème de Cauchy, il nous faut majorer intelligemment p et q de sorte que F soit explicite.

Comme p et q convergent au voisinage de 0, il existe c_1, c_2 et r telles que $|p_n| \leq \frac{c_1}{r^n}$ et $|q_n| \leq \frac{(n+1)c_2}{r^{n+1}}$ c'est-à-dire

$$p \prec \frac{c_1}{1 - z/r} \text{ et } q \prec \frac{c_2}{(1-z/r)^2}$$

Mais sait-on résoudre $F'' = \frac{c_1}{1-z/r}F' + \frac{c_2}{(1-z/r)^2}F$?

Oui ! C'est une équation d'Euler déguisée. On cherchera les solutions sous la forme $(1 - z/r)^\lambda$. En jouant sur c_1 et c_2 on en trouvera deux $(1 - z/r)^{\lambda_1}$ et $(1 - z/r)^{\lambda_2}$ toutes les deux holomorphes sur $D(0, r)$. Notons F la combinaison linéaire de ces deux fontions valant y_0 en 0 et ayant pour dérivée y_1 en 0. Par la proposition F majore f dont f converge sur $D(0, r)$.

Rappelez comment on résoud les équations dites d'Euler :

$$\sum_{i=0}^{n} c_i w^i \frac{d^i y}{dw^i} = 0$$

Montrez que dans une coordonnée $w = h(z)$ avec h une homographie convenable, l'equation obtenue dans la preuve est une equation d'Euler en la variable w.

3.2. **…en une singularité régulière.** Commençons par la remarque suivante.

Remark 2. *Si $y'' = py' + qy$ est régulière en 0 et si nous posons $y(z) = z^\alpha g(z)$ alors*

$$g''(z) = \left(p(z) - \frac{2\alpha}{z}\right) g'(z) + \left(q(z) + p(z)\frac{\alpha}{z} + \frac{\alpha(1-\alpha)}{z^2}\right) g(z)$$

et 0 est un point singulier pour cette nouvelle équation.

Définition 4. *Un point singulier de l'équation 1 est singulier-régulier si p y a un pôle d'ordre au plus 1 et q y a un pôle d'ordre au plus 2.*

Les autres singularités sont dites irrègulières

Une exemple important est fait dans Kristensson page 45

Proposition 5. *(1) est une equation d'Euler si et seulement si elle a deux singularités regulière en 0 et en ∞.*

Un "non-exemple" important s'appelle aussi equation d'Euler (il y a vraiment beaucoup d'équations dites d 'Euler qui n'ont rien à voir les unes avec les autres ... mis à part Euler.)

Exemple 3. *Les solutions de l'équation $z^2 \frac{dy}{dz} = y - z$ sont solutions d'une équation lineaire du second ordre à singularité irrégulière en 0. (Dérivez $z\frac{dy}{dz} - \frac{y}{z}$).*

Les solutions formelles de notre équation en 0 sont les multiples de $\sum n! z^{n+1}$ (qui diverge). On peux sommer cette série divergente en une solution (holomorphe !) de notre équation : On utilisera la sommation des série divergentes de Borel -Laplace après avoir lu `http://www.math.polytechnique.fr/xups/vol91.html` *mais vous attendrez les vacances de Noel !*

La proposition suivante se trouve dans Ahlfors

Proposition 6. *Considéront l'équation (1). Si p et q ont des pôles d'ordre au plus 1 et le résidu de p n'est pas entier alors il existe une solution holomophe au voisinage de 0.*

Proof. –

□

Définition 5. *Soit z_0 une singularité régulière de notre équations avec $p(z) = \frac{p_{-1}}{z-z_0} + h.o.t.$ (higher order terms) et $q(z) = \frac{q_{-2}}{(z-z_0)^2} + h.o.t.$. L'équation indicielle en z_0 est $\alpha(\alpha-1) - p_{-1}\alpha - q_{-2} = 0$*

Théorème 3.2. *Soit z_0 une singularité régulière de l'équation (1) et α_1, α_2 les deux racines de l'équation indicielle en z_0.*

Si $|\alpha_1 - \alpha_2| \notin \mathbf{N}$, il existe deux solutions $(z-z_0)_1^\alpha g_1(z)$ et $(z-z_0)_2^\alpha g_2(z)$ avec g's holomophes sur un voisinage de z_0 ne s'y annulant pas.

si $\alpha_1 - \alpha_2 \in \mathbf{N}$, il existe deux solutions $(z-z_0)_1^\alpha g_1(z)$ et $(z-z_0)_2^\alpha g_2(z) + \epsilon \ln(z-z_0)(z-z_0)_1^\alpha g_1(z)$ avec $\epsilon \in \{0, 1\}$.

Proof. – Voir Ahlfors qui utilise la remarque 2 et la proposition 2 ou bien Kristensson pour plus (beaucoup trop) de détails. □

4. Etude globale : la monodromie

4.1. **Prolongement analytique.** Vous pouvez regarder le chapitre idoine de Lang. Touts mes chemins sont paramétrées par $[0, 1]$, ce qui n'est pas le cas dans Lang.

Définition 6. *Extraire la definition du prolongement analytique d'une fonction holomorphe le long d'un chemin de la page 323. Le théoreme 1.1 de cette page est nécessaire.*

La fonction obtenue au voisinage de $\gamma(1)$ en prolongeant de f suivant γ sera noté f^γ (attention Lang mets le γ en bas)

Proposition 7. *Soint $S \subset \hat{\mathbf{C}}$ le lieu singulier d'une équation différentielle linéaire et f une solution au voisinage d'un point régulier z_0. Alors f se prolonge analytiquement le long de tout chemin issu de z_0 évitant S.*

Proof. –

□

Exemple 4. *Soit $k \in \mathbf{Z}$. Donnez les fonctions définies au voisinage de 1 obtenue en prolongeant les fonctions suivantes le long de $\gamma(t) = e^{2ik\pi t}; t \in [0,1]$ de z^α de $(\log z)^m$.*

Théorème 4.1. *Le theoreme de monodromie tel que dans Ahlfors ou dans Lang*

Proof. –

□

4.2. **Monodromie d'une équation différentielle linéaire. Il n'y a pas de référence pour cette partie, elle sera traitée lors du dernier cours.**

Tous les lacets évitent $S \subset \hat{\mathbf{C}}$ les singularités de léquation différentielle.

Lemma 2. *Soient f une solution de léquation dirfférentielle definie au voisinage de z_0 et γ un chemin issue de z_0. La fonction f^γ est encore solution de léquation différentielle.*

Soient (f_1, f_2) une base de solution de l'équation différentielle en un point régulier z_0 et γ un lacet issue de z_0. Alors (f_1^γ, f_2^γ) est une autre base de solution au voisinage de z_0

Définition 7. *Avec les notations du lemme ci-dessus, la matrice de changement de base $(f_1^\gamma, f_2^\gamma)M^\gamma = (f_1, f_2)$ est appelée la monodromie de léquation différentielle de long de γ*

Remark 3. *Cette monodromie dépend de la base choisie et pas seulement de l'équation et du lacet. Si on change de base $(g_1, g_2) = (f_1, f_2)C$ avec $C \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ alors la monodormie de g, noté N vérifie $N^\gamma = CM^\gamma C^{-1}$.*

Lemma 3. *On a $M^{\gamma_1\gamma_2} = M^{\gamma_1}M^{\gamma_2}$ où $\gamma_1\gamma_2$ est la concatenation de γ_1 suivi de γ_2.*

Lemma 4. *Si γ est homotope au lacet constant dans $\hat{\mathbf{C}} \setminus S$ alors $M^\gamma = I$ (la matrice identité)*

Définition 8. *Le groupe de monodromie de léquation différentielle en z_0 est l'ensemble des matrice de monodromie des lacets issues de z_0.*

Le groupe de monodromie est un sous groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$. Si nous changeons de base de solution pour le calculer, nous obtenons un sous-groupe conjugué

Théorème 4.2. *Soit z_0 une singularité deléquation différentielle et M la matrice de monodromie d'une base de solution le long du lacet $\gamma(t) = z_0 + re^{2i_pit}$.*

Si M a deux valeurs propres énumérées avec multiplicités λ_1, λ_2 alors il existe une base de solution de la forme $(z - z_0)_1^\alpha f_1(z)$ et $(z - z_0)_2^\alpha f_2(z)$ avec $e^{2i\pi\alpha} = \lambda$ et $f \in \mathcal{O}(D^*(z_0, \epsilon)$

Si M a une seule valeur propre λ alors il existe une base de solution de la forme $(z - z_0)^\alpha f_1(z)$ et $(z - z_0)^\alpha f_2(z) + \log(z - z_0)(z - z_0)^\alpha f_1(z)$ avec $e^{2i\pi\alpha} = \lambda$ et $f \in \mathcal{O}(D^*(z_0, \epsilon)$

Comparez avec le théorème analogue pour les singularités régulières.

Proof. – Quitte a changer de base, on peut supposer que M est sous forme normale de Jordan. Notons C une matrice telle que $e^{2i\pi C} = M$ alors la matrice de fonction holomorphe au voisiange de $z_0 + r$, $A(z) = (z - z_0)^C = e^{C \log(z - z_0}$ se prolonge analytiquement le long du lacet et $A^\gamma = MA$.

Le vecteur de fonctions $(f_1, f_2)A$ n'a pas de monodromie : $((f_1, f_2)A)^\gamma = (f_1^\gamma, f_2^\gamma)A^\gamma = ((f_1, f_2)M^{-1})(MA)$. C'est donc une fonction uniforme sur le disque épointé. □

Définition 9. *Un fonction f holomorphe est à croissance modérée en z_0 si f se prolonge sur tout secteurs pointant en z_0 et si il existe $c \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$ tels que*

$$|f(z)| \leq \frac{c}{|z - z_0|^n}$$

Théorème 4.3. *Il existe une base de solutions à croissance modérée en z_0 si et seulement si z_0 est une singularité régulière*

Remarquez qu'un sens est déjà démontré et c'est le seul nécessaire pour montrer le théorème suivant

Théorème 4.4. *Un EDO dont toutes les singularités sont régulière et dont la monodromie est triviale admet une base de solutions rationnelles.*

Proof. –

□